勉強ノート：電磁気学

マクスウェルの方程式

マクスウェルの方程式は,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \iff \mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \cdots \\
&\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 && \cdots \\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} && \cdots \\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \iff \frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} && \cdots
\end{aligned}
$$

である.

について

積分形のガウスの法則

$$\int_{S_0} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n)$$

を変形すると,

$$\int_{S_0} D_n dS = \int_V \rho(\boldsymbol{x})d^3x$$

である. ガウスの発散定理を用いると,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = \int_V \rho(\boldsymbol{x})$$

となる. 時間発展する場合も,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t) = \int_V \rho(\boldsymbol{x}, t)$$

が成り立つ.

について

積分形の磁場に関するガウスの法則

$$\int_{S_0} B_n dS = 0$$

について, ガウスの発散定理を用いると,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = 0$$

となる. 時間発展する場合も,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

が成り立つ.

について

積分形のファラデーの電磁誘導の法則より,

$$\begin{aligned}\phi^{e.m.} &= \int_{C_0} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} \\ &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}\int_S B_n dS\end{aligned}$$

である. 微分形では, ストークスの定理より,

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}$$

である.

について

積分形の電荷保存則より,

$$-\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{S_0} i_n(\boldsymbol{x}, t) dS$$

である. 微分形では,

$$-\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \mathrm{div}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}, t)$$

となる. ここで, 元の式が時間変動しても成り立つとすると,

$$\mathrm{div}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{div}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}, t)$$

となり矛盾するので,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \\
\because \mathrm{div}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t) &= \mathrm{div}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) \\
0 &= \mathrm{div}\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial \rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}
\end{aligned}
$$

静電場

静電場で成り立つ基本法則は,

$$
\begin{aligned}
\text{ガウスの法則}: \int_{S_0} D_n dS = \int_V \rho d^3x,\ \mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho \\
\text{無名の法則}: \int_{C_0} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = 0,\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0
\end{aligned}
$$

である.

静電場 $\boldsymbol{E}$ の中に置かれた点電荷 q が受ける力は,

$$
\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}
$$

静電場において, 電場は静電ポテンシャルを用いて,

$$
\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi
$$

となる. これより,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{E} &= -\mathrm{divgrad}\phi(\boldsymbol{x}) \\
&= -\Delta\phi(\boldsymbol{x}) \\
&= \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

なので, ポアソンの方程式

$$
\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}
$$

で記述されることがわかる.

静磁場

静磁場で成り立つ基本法則は,

$$\text{ガウスの法則}:\int_{S_0} B_n dS = 0,\ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$
$$\text{アンペールの法則}:\int_{C_0} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} = I,\ \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$$

である.

導線内の定常電流のつくる磁場を求めるには,

$$\text{ビオ − サバールの法則}: d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

を用いる.

静磁場において磁束密度はベクトルポテンシャルを用いて,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$$

となる. これより,

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= \mathrm{divrot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\\ &= 0\end{aligned}$$

である.

電磁波の波動方程式

$\boldsymbol{E}$ について, $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$ に $\nabla \times$ を作用させると,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\nabla \times \frac{\partial B}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \\
&= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} \\
\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} &= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \\
&= -\nabla^2 \boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\nabla^2 \boldsymbol{E} \\
&= c^2 \nabla^2 \boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

である.

$\boldsymbol{B}$ についても同様に,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\nabla^2 \boldsymbol{B} \\
&= c^2 \nabla^2 \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

である.

これらより, 真空中で電場と磁場は電磁波として伝わる.

電磁場のエネルギー

単位体積あたりの電磁場のエネルギー u は,

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2$$
$$\left(= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \boldsymbol{H}^2 \right)$$

である. 電磁波では, 電場と磁場のエネルギーは同じ大きさである.

閉曲面 S 中の電磁場のエネルギー U について,

$$\begin{aligned}
U &= \int_V u dV \\
\frac{dU}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_V u dV \\
&= \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV \\
&= \int_V \left(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) dV \\
&= \int_V \left[\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) \right] dV \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) dV \\
&= -\int_S \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}) dS \\
&= -\int_S \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n} dS
\end{aligned}$$

である. $\boldsymbol{S}(\equiv \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}(=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}))$ はポインティングベクトルと呼ばれ, エネルギーの流れの密度を表す.

インダクタンス

インダクタンスは, 巻線などにおいて, 電流の変化が誘導起電力となって現れる性質である.

自己誘導と自己インダクタンス

巻線を貫く磁束が変化して流れる電流が変化すると, 磁束の変化を打ち消す方向に誘導起電力が発生する. その大きさは,

$$e = -L\frac{dI}{dt}[V]$$

である. 自己インダクタンスは, 自己誘導の起こしやすさを示し,

$$L = N\frac{d\Phi}{dI}[H]$$

である.

相互誘導と相互インダクタンス

磁気的に結合された二つの巻線の一方の電流を変化させると, もう一方の巻線に誘導起電力を生じる. その大きさは,

$$e = -M\frac{dI}{dt}$$

である. 相互インダクタンスは, 次式

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (k : \text{結合定数})$$

で表される.

コンデンサー

導体表面上の誘導電荷の分布を考えると,

$$E(\boldsymbol{x})\Delta S = \omega(\boldsymbol{x})\Delta S/\varepsilon_0$$

より,

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_0 E(\boldsymbol{x})$$

である．これが電荷分布に関するクーロンの法則で, 誘導電荷の面密度 ω を知ることができる．

コンデンサーは誘電体によって分離された二枚の電極, 電極板によって構成される．

導体間の電位差を 1V 上昇させるのに要する電荷量を静電容量とする．単位は F (ファラッド) (= C / V) である．つまり,

$$C = \frac{Q}{V}$$

である．

一方の極板から他方に微小電荷を運ぶことによって, 両極板上の電荷を $\pm Q$ にするとき, 外から与える仕事は,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{C}\int_0^Q q dq \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \end{aligned}$$

である．この仕事 W は, コンデンサーの内部に静電エネルギー (静電場エネルギー) として蓄えられ,

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{1}{2}QV \end{aligned}$$

である．

電場 $\boldsymbol{E}$ が時間的に変動するより一般的な場合を考えると, 平行板コンデンサーの場合を考えると, $E = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ より,

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}\frac{d}{\varepsilon_0 S}(\varepsilon_0 SE)^2 \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (dS) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 v \end{aligned}$$

である. 静電場 $\boldsymbol{E}$ が一様ではなく, 場所の関数であるとき,

$$U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V \boldsymbol{E}^2(x, y, z) d^3x$$

である.